Aftelbaarheid

Auteur: drs. M.S.L.F. Manssen

http://www.manssen.eu

We beginnen dit document met wat definities:

(1) Gegeven twee verzamelingen V_1 en V_2 : een *functie f* over is een relatie R deelverzameling van $V_1 \times V_2$, waarvoor geldt: $(x, y_1) \in R \wedge (x, y_2) \in R \Rightarrow y_1 = y_2$.

(2) V_1 wordt het *domein* van *f* genoemd.

(3) V_2 wordt het *codomein* van *f* genoemd.

(4) De verzameling functiewaarden { *f(x)* | $x \in V_1$ } wordt het *bereik* van *f* genoemd. Er geldt: $bereik \subseteq codomein$.

(5) *f* is *surjectief* als een het bereik van *f* gelijk is aan het codomein van *f*.

(6) Een functie *f* wordt *injectief* genoemd als $(x_{1,} y) \in R \wedge (x_{2,} y) \in R \Rightarrow x_1 = x_2$.

(7) Een functie *f* wordt een *bijectie* genoemd als *f* zowel surjectief als injectief is.

(8) Een verzameling *V* is *aftelbaar* als er een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en *V* bestaat.

(9) De verzameling van alle deelverzamelingen van een verzameling *V* wordt genoteerd als 2^V . Dus 2^V = { x | $x \subseteq V$ } .

Nu geven we twee stellingen:

(1) $\mathbb{R}$ is niet aftelbaar.

(2) $2^{\mathbb{N}}$ is niet aftelbaar.

Bewijs van stelling 1:

Het bewijs van deze stelling wordt ook wel het het diagonaalbewijs van Cantor genoemd.

Ik gebruik een bewijs uit het ongerijmde. Stel dat $\mathbb{R}$ wel aftelbaar is. Dan is de verzameling reële getallen <0,1> zeker aftelbaar. Er een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en <0,1>. Een getal *x* tussen in <0,1> is te schrijven als $0,d_{x0} d_{x1} d_{x2} d_{x3} d_{x4} d_{x5} \cdots$, b.v. : $0,12345\cdots$. Stel dat de bijectie er als volgt uitziet:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
0 & - & 0, & \boldsymbol{d_{00}} & d_{01} & d_{02} & d_{03} & d_{04} & d_{05} & d_{06} & d_{07} & d_{08} & \cdots \\
1 & - & 0, & d_{10} & \boldsymbol{d_{11}} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & d_{17} & d_{18} & \cdots \\
2 & - & 0, & d_{20} & d_{21} & \boldsymbol{d_{22}} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & d_{27} & d_{28} & \cdots \\
3 & - & 0, & d_{30} & d_{31} & d_{32} & \boldsymbol{d_{33}} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & d_{37} & d_{38} & \cdots \\
4 & - & 0, & d_{40} & d_{41} & d_{42} & d_{43} & \boldsymbol{d_{44}} & d_{45} & d_{46} & d_{47} & d_{48} & \cdots \\
5 & - & 0, & d_{50} & d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & \boldsymbol{d_{55}} & d_{56} & d_{57} & d_{58} & \cdots \\
6 & - & 0, & d_{60} & d_{61} & d_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} & \boldsymbol{d_{66}} & d_{67} & d_{68} & \cdots \\
\cdots
\end{array}
$$

Dus in de bijectie zijn bijvoorbeeld 3 en $0,d_{30} d_{31} d_{32} d_{33} d_{34} d_{35} \cdots$ aan elkaar gekoppeld.

Kies nu een getal $y \in <0,1>$ dat geschreven wordt als $0,d_{y0} d_{y1} d_{y2} d_{y3} d_{y4} d_{y5} \cdots$. Kies nu d_{yi} zodanig dat $d_{yi} \neq d_{ii}$. (In de bijectie hierboven zijn de d_{ii} vet weergegeven). Nu kan *y* nergens in de bijectie voorkomen. Dus bestaat de bijectie niet, en is $\mathbb{R}$ niet aftelbaar.

Bewijs van stelling 2:

Het bewijs dat ik hier geef is nog sterker: tussen geen enkele verzameling V bestaat er een bijectie met 2^V. I Ik gebruik weer een bewijs uit het ongerijmde. Stel dat er wel een bijectie *f* tussen V en 2^V bestaat. Voor sommigen elementen *x* uit V zal *x* voorkomen in *f(x)*, voor sommige niet. Neem nu V_1 en V_2 zodanig dat $V_1 = \{ x \mid x \in f(x) \}$ en $V_2 = \{ x \mid x \notin f(x) \}$. Merk op dat $V_1 \cup V_2 = V$ en $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Nu moet er een *y* zijn met $f(y) = V_2$, want ook $V_2 \subseteq \mathbb{N}$. Er geldt $y \in V_1$ of $y \in V_2$. Stel dat $y \in V_1$, maar dan $y \in f(x) = V_2$. Tegenspraak. Dus moet $y \in V_2$. Dan weer $y \in V_2 = f(x)$. Tegenspraak met de definitie van V_2. Dus noch $y \in V_1$, noch $y \in V_2$. Er is dus geen bijectie *f* tussen *V* en 2^V en zeker niet tussen $\mathbb{N}$ en $2^{\mathbb{N}}$.