Verzamelingen

door drs. M.S.L.F. Manssen

Inleiding

In dit artikel behandel ik de beginselen van de verzamelingenleer. Als er over een postzegelverzameling wordt gesproken, weet iedereen wel wat er mee wordt bedoeld. Heb je een postzegelverzameling, dan kun je nagaan of een bepaalde postzegel er wel of niet in zit. In je verzameling kunnen bepaalde postzegels ook meerdere keren voorkomen. En de postzegels kunnen in een bepaalde volgorde in je postzegelalbum zitten.

Basisdefinities

Een wiskundige verzameling werkt anders dan een postzegelverzameling. Iets wat in een wiskundige verzameling zit, wordt een element genoemd. Als je opsomt wat er in een verzameling voorkomt, noem je de elementen op, en zet je er komma's tussen. De opsomming wordt tussen accolades gezet. Bijvoorbeeld de verzameling leden van de lokale tennisclub, { Jan, Piet, Gijs}. De volgorde van opsomming is bij een wiskundige verzameling niet van belang. Verder heeft het geen nut om elementen vaker dan één keer op te noemen, als een element deel uitmaakt van een verzameling, zit hij er altijd maar één keer in. We weten nu dus dat { Jan, Piet, Gijs } gelijk is aan{ Piet, Jan, Jan, Gijs }.

Stel dat er ook een voetclub is met als ledenverzameling { Hans, Henk, Piet }. De verzameling van leden die zowel lid is van de tennisclub, als van de voetbalclub, wordt de doorsnede van deze twee verzamelingen genoemd. In dit geval is de vereniging: { Piet }. De verzameling leden lid is van de tennisclub als van de voetbalclub, wordt de vereniging van beide verzamelingen genoemd. De vereniging is hier: { Jan, Piet, Gijs, Hans, Henk }.

Als elk element van een bepaalde verzameling ook element is van een andere verzameling, wordt de eerste verzameling een deelverzameling van de tweede verzameling genoemd. Bijvoorbeeld { Jan, Gijs } is een deelverzameling van { Jan, Piet, Gijs }.

Je kunt ook element weglaten uit een verzameling. Stel dat we uit de verzameling { Hans, Henk, Piet } de alle element van de verzameling { Henk, Piet } willen weglaten. Dan blijft over { Hans }.

Een verzameling kan ook helemaal leeg zijn. Bijvoorbeeld, als de golfclub geen leden heeft, is de ledenverzameling leeg.

Notatie

Zoals gebruikelijk in de wiskunde, is er een speciale notatie voor verzamelingen bedacht. Om te beginnen, is het handig om niet steeds de lange frase “ledenverzameling van de voetbalclub” op te schrijven, maar dit af de korten met de letter V. De “ledenverzameling van de tennisclub” kunnen we dan bijvoorbeeld T noemen, en de ledenverzameling van de golfclub” G noemen.

Om aan te geven dat een element deel uitmaakt van een bepaalde verzameling wordt ook een bepaald symbool gebruikt. De notatie $Jan \in T$ betekent dat Jan lid is van de voetclub. En $Jan \notin V$ betekent dat Jan geen lid is van de tennisclub.

De doorsnede van de verzamelingen T en V wordt aangeduid als $T \cap V$. De vereniging van T en V wordt genoteerd als $T \cup V$.

Voor het weglaten van elementen van een verzameling uit een andere verzameling, wordt het symbool \ gebruikt: { Hans, Henk, Piet } \ { Henk, Piet } = { Hans }.

Om de gelijkheid van twee verzamelingen aan te geven, wordt, zoals te verwachten, het = symbool gebruikt. Een verzameling is altijd gelijk aan zichzelf, dus $T = T$.

De lege verzameling is een deelverzameling van elke andere verzameling, dus ook van V.

Notatie: $\varnothing \subseteq V$ Hiermee zeggen we dat $\varnothing$ een deelverzameling of gelijk is aan *V*. Is er wel sprake van een deelverzameling, maar niet van gelijkheid, dan wordt er $\varnothing \subset V$ geschreven.

Met het symbool $\varnothing$ wordt de lege verzameling bedoeld. Zo geldt: $G = \varnothing$.

Om een verzameling te beschrijving wordt ook wel eens een volgende notatie gebruikt. Tussen accolades staat een verticale streep: |. Voor deze streep straat de naam van een element, en achter de streep staan de voorwaarden waar elementen van de verzameling aan moeten voldoen. Een voorbeeld is de verzameling van alle getallen groter dan 2: { x | x>2 }.

Tot nu toe hebben we verzamelingen beschouwd die enkelvoudige elementen bestaan: personen of getallen. Maar in feite kunnen verzamelingen uit alle typen elementen bestaan, zolang alle elementen van de verzameling maar van hetzelfde type zijn. Stel dat we de verzameling willen weergeven die bestaat uit de combinatie van de naam van een lid van de voetbalclub en de leeftijd van het lid, dan wordt dit bijvoorbeeld: { (Hans, 19), (Henk,17), (Piet,23) }.

Stel dat tijdens een dansles de leden van de voetbalclub aanwezig zijn. Dit zijn allen heren. Nu is er ook een verzameling dames aanwezig: { Tina, Erica, Betsie }. Welke mogelijke paren kunnen er gevormd worden? De verzameling van mogelijke combinatie is: { (Hans, Tina), (Hans, Erica), (Hans, Betsie), (Henk, Tina), (Henk, Erica), (Henk, Betsie), (Piet, Tina), (Piet, Erica), (Piet, Betsie) }. De verzameling van de heren hadden we al eerder V genoemd. Laten we de verzameling dames F (van Females, engels voor vrouwen) noemen. Dan wordt de verzameling van alle mogelijke combinaties genoteerd als: *V* x *F*. Dit wordt ook wel het Cartesisch product genoemd.